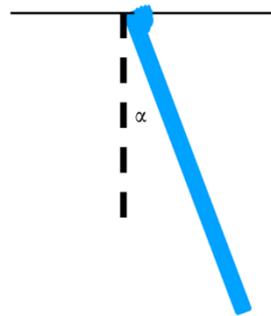


# 2022 年物理科学与工程学院博士资格考试笔试

## 第一部分 (必做题)

1. 一个氢原子中的自旋轨道相互作用可以写为  $H_{so} = A \vec{S} \cdot \vec{L}$ , 其中 S 表示电子自旋, L 表示轨道角动量, 常数  $A = \frac{e^2}{2m^2 c^2 r^3}$ ,
  - a) 请以氢原子为例描述自旋轨道相互作用的物理起源;
  - b) 利用氢原子的波函数或本征态对角化  $H_{so}$ ;
  - c) 对于径向量子数  $n=2$  的态, 求此时氢原子自旋轨道相互作用的能量。
2. 考虑一种自旋为零的量子玻色气体包含  $N$  个粒子 ( $N \gg 1$ ), 已知气体被封闭在体积为  $V$  的容器中, 其温度  $T$  低于玻色-爱因斯坦凝聚问题  $T_c$ , 请试回答:
  - a) 求此时气体压强  $P$ , 并给出  $P$  随温度  $T$  变化的函数 ( $T < T_c$  区间);
  - b) 画出  $P-T$  关系图;
  - c) 求此系统的熵  $S$ , 以及量子气体的比热  $C_v$  随温度的函数。
3. 真空中一束电磁波的磁场部分表示为  $\vec{B}(x, y, z, t) = (b\vec{i} - a\vec{j}) \cos(ax + by - \omega t)$ , 请给出 a) 该电磁波对应的电场表达式, b) 该电磁波的能量密度和 Poynting 坡印廷矢量。如该电磁波在  $x=0$  处被理想导体反射, 试求 c) 反射电磁波的电场和磁场表达式, d) 导体表面的面电荷密度和面电流密度。
4. 一个垂直摆由一根长为  $L$  质量为  $M$  的刚性杆和一个质量为  $\frac{1}{3}M$  并沿杆爬行的昆虫组成, 已知初始  $t=0$  时刻, 虫子位于摆最高端转轴处, 杆处于偏离垂直位置角度  $\alpha$  的幅值开始向下摆。之后虫子以固定速度  $v$  向杆的底部爬行。请试求:
  - a) 虫子爬下距离为  $x$  时, 杆摆动的频率?
  - b) 当虫子爬到杆底端时, 杆的摆动幅度?
  - c) 为使得 a), b) 结果有效, 虫子的爬行速度应该多慢?
5. 一个矩阵  $\hat{L}$  表示的线性变换  $A$  可以把一组玻色算符  $\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k$  变换到另外一组算符,



$$\hat{b}'_m = \sum_k L_{mk} \hat{b}_k$$

找到符合条件的矩阵 $\hat{L}$ 使得变换前后的算符都满足玻色子对易规则。更一般的变换B是

$$\hat{b}'_m = \sum_k L_{mk} \hat{b}_k + \sum_k M_{mk} \hat{b}_k^\dagger$$

找到符合条件的矩阵 $\hat{L}, \hat{M}$ 使得变换前后的算符都满足玻色子对易规则。

6. 在量子光学中，相干态起着重要的作用，他们就是所谓的位移和压缩算子，被定义为：

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}$$

$$\hat{S}(z) = e^{\frac{1}{2}(z^* \hat{a}^2 - z \hat{a}^{\dagger 2})}, \text{ with } z = r e^{i\theta}$$

位移算符作用于对应参数 $\lambda$ 的相干态得到与 $\lambda + \alpha$ 对应的相干态，即它使得相干态在相空间平移了 $\alpha$ 的距离。

- 证明当算符 $\hat{D}(\alpha)$ 作用在真空态（即对应 $\lambda=0$ 的相干态）上，产生了一个新的相干态 $\lambda = \alpha$ 。
- 证明 $\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$ 。对于 $\hat{a}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ 的一个相干态 $|\psi\rangle$ ，用该关系证明 $\hat{a} \hat{D}(\alpha)|\psi\rangle = (\lambda + \alpha)|\psi\rangle$ 。
- 如果 $\alpha$ 是纯虚的，那么 $\hat{D}(\alpha)$ 对以期待值 $x_0$ 和 $p_0$ 表示的振子中的相干态有什么影响？
- 假设对 $\hat{a}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ 的相干态，无量纲的共轭变量 $\hat{P} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \hat{Q} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ 具有最小的不确定性， $(\Delta P)^2 = (\Delta Q)^2 = \frac{1}{2}$ 。现在让压缩算子作用于这个状态， $\hat{S}(r)|\psi\rangle = |\psi_r\rangle$ ，其中 $r$ 假定为实数。计算新状态 $|\psi_r\rangle$ 的 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 的不确定性。

7. 考虑哈密顿量

$$\hat{H} = \Delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{g}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}) (\Delta > g > 0),$$

其中,  $\hat{a}$  满足  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$  是玻色模式的湮灭算符。

(1) 为了求解这个哈密顿量的能谱, 可以引入一个新的玻色模式  $\hat{b} = u\hat{a} + v\hat{a}^\dagger$ , 其中,  $u, v$  均为实数, 请证明  $u^2 - v^2 = 1$ .

(2) 找到合适的  $u, v$ , 使得  $\hat{H} = \Delta\hat{b}^\dagger\hat{b} + E_0$ , 并给出对应的  $\Delta, E_0$ .

(3) 定义: 
$$\hat{K}_0 = \frac{1}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger), \hat{K}_1 = \frac{1}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}), \hat{K}_2 = \frac{1}{4i}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a})$$

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i\hat{K}_0, [\hat{K}_0, \hat{K}_1] = i\hat{K}_2, [\hat{K}_2, \hat{K}_0] = i\hat{K}_1.$$

请基于此给出  $\hat{K}_0, \hat{K}_1, \hat{K}_2$  满足的海森堡运动方程, 进而讨论如果  $g > \Delta$ , 系统粒子数会随时间如何变化?

8. 宇宙背景辐射是大爆炸在宇宙中残留的电磁辐射, 如已知此背景辐射的光子是无质量的玻色子, 且有两个极化自由度 ( $g=2$ ), 并已知其光子色散关系为  $\varepsilon_p = cp$  (其中  $c$  表示光速)。如假定宇宙背景辐射绝对温度为  $T_0$ 。请试求

- (1) 宇宙背景辐射的能量密度;
- (2) 宇宙背景辐射产生的压强;
- (3) 如已知  $T_0=3K$ , 请计算相应的能量密度和压强数值。

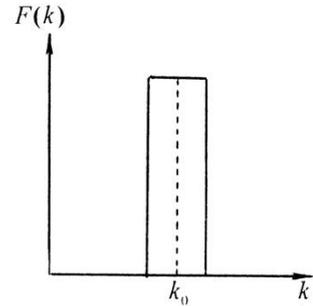
9. 在真空中, 有一个均匀带电的半径为  $a$  的介电常数为  $\varepsilon$  的介质球, 总带电量为  $Q$ ; 介质球附近放置一个半径为  $R$  的导体球; 介质球和导体球的球心距为  $b$ 。求整个空间中的电场分布、导体球表面的感应电荷分布以及介质球和导体球之间的作用力。

## 第二部分 (选做题)

从下面 9 个题目中任选 4 题解答。

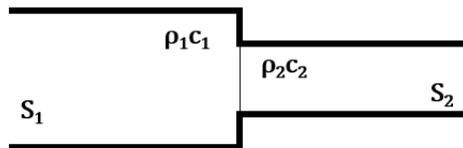
1. 推导电磁波从复电磁参数  $\varepsilon_1, \mu_1$  的半无限空间传播到复电磁参数  $\varepsilon_2, \mu_2$  的半无限空间的 Snell 公式和菲涅尔公式; 讨论此时的布儒斯特角公式。
2. 说明紧束缚激子与松束缚激子的异同。
3. 推导激光形成的基本条件并以此说明激光器三要素的作用。
4. 说明 PN 结整流作用的原理。

5. 光源的光谱分布规律如图所示，图中以波数  $k$  为横轴，中心波数为  $k_0$ ，在光谱宽度  $\Delta k$  范围内  $F(k)$  不变 ( $\Delta k \ll k_0$ )。将光源出射的强度为  $I_0$  的光束分成强度相等的两束光，设这两束光再度相遇时的偏振方向相同，光程差为  $\Delta S$ ，试求：

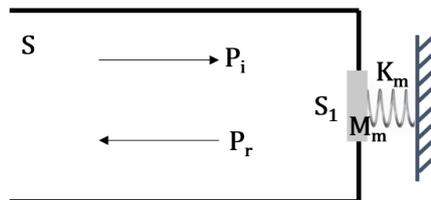


向相同，光程差为  $\Delta S$ ，试求：

- (1) 双光束干涉后所得光强的表达式  $I(\Delta S)$ ;
  - (2) 干涉条纹的对比度  $V(\Delta S)$ ;
  - (3) 对比度  $V$  的第一个零点所对应的  $\Delta S$ 。
6. 某理想流体媒质中 (特性阻抗为  $\rho_0 c_0$ )，平面波入射到无限大的柔性壁上 (声阻抗率趋于 0)，入射波与柔性壁法线夹角为  $60^\circ$ ，则在柔性壁前的半无限大空间中，到柔性壁表面的垂直距离为  $1/2$  波长处的法向声阻抗率约为何值？到柔性壁表面的垂直距离为  $1$  波长处的法向声阻抗率约为何值？ (“法向”指垂直于柔性壁并指向柔性壁外。)
7. 如图所示，假设在面积为  $S_1$  的管中充满特性阻抗为  $\rho_1 c_1$  的流体，而在面积为  $S_2$  的管中充满  $\rho_2 c_2$  的流体，两管通过薄膜隔开；假定声波从  $S_1$  管中传来， $S_2$  管延伸无限，试求  $S_2$  管中的声功率透射系数。



8. 设在面积为  $S$  的声管的末端装一个面积为  $S_1$  的活塞式振子，如图所示。假定活塞质量为  $M_m$ ，弹簧的弹性系数为  $K_m$ ，力阻很小可以忽略，试求管中的声压反射系数。



9. 简要介绍光学成像系统分辨本领的概念。如果一台显微镜的数值孔径  $N.A. = 0.9$ ，试求：

- (1) 计算其最小分辨距离 (波长为 550nm);
- (2) 利用油浸物镜使数值孔径增大到 1.5, 工作波长减小至 430nm, 问它分辨本领的变化。